

## 数 学 (理科) 试 卷

## 注意事项:

1. 本试题分第 I 卷(选择题)、第 II 卷(非选择题)两部分。
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。
3. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

D. 1. 已知复数  $z = \frac{15i}{3+4i}$ , 则  $z$  的虚部为 ( )

- A.  $-\frac{9}{5}i$       B.  $\frac{9}{5}i$       C.  $-\frac{9}{5}$       D.  $\frac{9}{5}$

2.  $y = u^2 \cdot u = \sin x$

D. 2. 函数  $f(x) = \sin^2 x$  的导数是 ( )

- A.  $2\sin x$       B.  $2\sin^2 x$       C.  $2\cos x$       D.  $\sin 2x$

A. 3. 定积分  $\int_0^1 \sqrt{x(2-x)} dx$  的值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{4}$       B.  $\frac{\pi}{2}$       C.  $\pi$       D.  $2\pi$

B. 4. 已知  $f(x) = 3x^2 + 5$ , 则从 0.1 到 0.2 的平均变化率为 ( )

- A. 0.3      B. 0.9      C. 0.6      D. 1.2

B. 5. 执行如图所示的程序框图, 则输出结果为 ( )

- A. 4      B. 9      C. 7      D. 5

D. 6. 已知函数  $f(x) = e^x + \ln(x+1)$  的图像在  $(0, f(0))$  处的切线与直线  $x - ny + 4 = 0$  垂直, 则  $n$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B. 2      C.  $-\frac{1}{2}$       D. -2

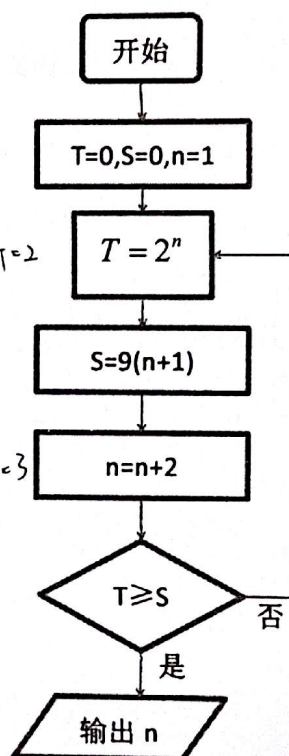
B. 7. 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x + m, m \in R$  的最小值为 -1, 则  $\int_1^2 f(x) dx = ( )$

- A. 2      B.  $\frac{16}{3}$       C. 6      D. 7

C. 8. 已知曲线  $y = ax \cos x$  在  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  处的切线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 则实数  $a$  的值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $-\frac{\pi}{2}$       C.  $-\frac{1}{\pi}$       D.  $\frac{1}{\pi}$

A. 9. 设函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + m$  的极大值为 1, 则函数  $f(x)$  的极小值为 ( )



A.  $-\frac{1}{3}$

B. -1

C.  $\frac{1}{3}$

D. 1

D. 10. 点  $P$  是曲线  $y = x^2 - \ln x$  上任意一点, 则点  $P$  到直线  $x - y - 2 = 0$  的最短距离为 ( )

A.  $\sqrt{3}$

B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D.  $\sqrt{2}$

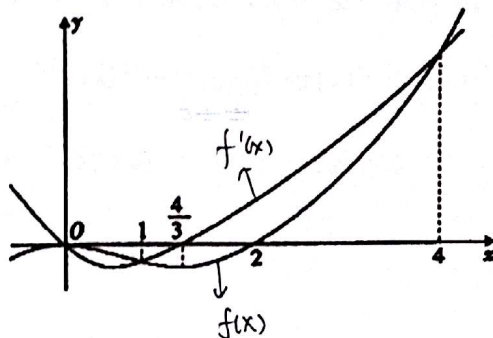
D. 11. 已知函数  $f(x)$  与  $f'(x)$  的图象如下图所示, 则函数  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$  的单调递减区间为 ( )

A.  $(0, 4)$

B.  $(-\infty, 1), (\frac{4}{3}, 4)$

C.  $(0, \frac{4}{3})$

D.  $(0, 1), (4, +\infty)$



B. 12. 已知函数  $f(x) = -\frac{2f'(1)}{3}\sqrt{x} - x^2$  的最大值为  $f(a)$ , 则  $a$  等于 ( )

A.  $\frac{1}{16}$

B.  $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$

C.  $\frac{1}{4}$

D.  $\frac{\sqrt[3]{4}}{8}$

$f'(1) = -\frac{2}{3}$

## 第 II 卷

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分。

13.  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$  的值等于 -2.

14.  $x, y$  互为共轭复数, 且  $(x+y)^2 - 3xyi = 4 - 6i$  则  $|x| + |y| = \underline{2\sqrt{2}}$ .

15. 在整数集  $Z$  中, 被 5 除所得余数为  $k$  的所有整数组成一个“类”, 记为  $[k]$ , 即

$[k] = \{5n+k | n \in Z\}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . 给出如下四个结论:

①  $2014 \in [4]$ ; ②  $-3 \in [3]$ ; ③  $Z = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$ ; ④ 2015 与 2010 属于同一个“类”. 其中, 正确结论的个数是 3.

16. 观察如下数表的规律 (仿杨辉三角: 下一行的数等于上一行肩上相邻两数的和):

1 2 3 4 5 6 ..... 10  
3 5 7 9 11 .....  
8 12 16 20 .....  
20 28 36 .....  
48 ... 64 .....

该数表最后一行只有一个数, 则这个数是 2816.





三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题 10 分) (1) 用辗转相除法求 840 与 1764 的最大公约数. ✓

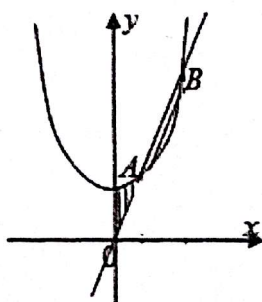
(2) 用秦九韶算法计算函数  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x - 4$  当  $x = 2$  时的函数值.

18. (本小题 10 分) 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间和极值; ✓

(2) 求曲线在点  $(0, f(0))$  处的切线方程. ✓

19. (本小题 10 分) 如图，求由曲线  $y = x^2 + 2$  与  $y = 3x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  所围成的平面图形的面积. ✓



$$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

20. (本小题 12 分) 设  $i$  为虚数单位,  $n$  为正整数,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . 已知复数  $z = a + bi$  对应的点为  $Z(a, b)$ , 令  $|OZ| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\angle ZOx = \theta$ , 则  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

(1) 用数学归纳法证明:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ ; ✓

(2) 已知  $z = \sqrt{3} + i$ , 试利用 (1) 的结论计算  $z^{10}$ ; ✓

(3) 设复数  $z \in C$ , 求证:  $|z^n| = |z|^n$  ( $n \in N^*$ ). ✓



21. (本小题 14 分) 已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$  的图象与  $x$  轴有两个不同的交点, 若  $f(c) = 0$ , 且  $0 < x < c$  时,  $f(x) > 0$ .

(1) 证明:  $\frac{1}{a}$  是  $f(x) = 0$  的一个根; ✓

(2) 试比较  $\frac{1}{a}$  与  $c$  的大小; ✓ >

(3) 证明:  $-2 < b < -1$ . ✓

22. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x$  ( $a > 0$ ),

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线为  $y = 2x + b$ , 求  $a + 2b$  的值; ✓

(2) 讨论函数  $f(x)$  的单调性; ✓

(3) 设函数  $g(x) = -(a+2)x$ , 若至少存在一个  $x_0 \in [e, 4]$ , 使得  $f(x_0) > g(x_0)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围. ✓

$$1 - \frac{4}{\ln 4} = -2$$

$$[-\frac{4}{\ln 4}, +\infty)$$

$$\frac{\ln 2}{2}$$

$$[-\frac{4}{\ln 4}, +\infty)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{2}{\ln 2}$$

