

深圳市高级中学2015—2016学年第一学期期末测试

高一数学

命题人: 范艳 审题人: 程正科

本试卷由两部分组成。第一部分: 期中前基础知识和能力考查, 共 57 分; 第二部分: 期中后知识考查, 共 93 分。全卷共计 150 分, 考试时间为 120 分钟。

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动用橡皮擦干净后, 再涂其它答案, 不能答在试题卷上。
3. 考试结束, 监考人员将答题卡按座位号、页码顺序收回。

第 I 卷 (本卷共计 57 分)

一. 选择题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x + 3\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{2, 5\}$ B. $[2, 5]$ C. $(2, 5)$ D. $\{(2, 5)\}$
2. 若 $a = \ln 2$, $b = \pi^{\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} e$, 则有
 A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$
3. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 的零点所在的区间为
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2, & x \leq 1, \\ \log_2(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right] =$
 A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. -5 D. $\frac{1}{2}$
5. 已知定义域为 \mathbf{R} 的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 则不等式 $f(\log_4 x) > 2$ 的解集为
 A. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ D. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

二. 填空题: 共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分, 把答案填在答卷卡的相应位置上。

6. 计算 $(\lg \frac{1}{4} - \lg 25) \div 100^{-\frac{1}{2}} =$ _____.

7. 已知符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, 则函数 $f(x) = \operatorname{sgn}(\ln x) - \ln x$ 的零点个数为_____

三. 解答题: 共 2 小题, 共 22 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

8. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + ae^x}$, 其中 a 为常数.

(1) 若 $a = 1$, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 若函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + ae^x}$ 在其定义域上是奇函数, 求实数 a 的值.

9. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 + ax + 2)$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

第 II 卷 (本卷共计 93 分)

四. 选择题: 共 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。

10. 已知直线 $Ax + By + C = 0$ 不经过第三象限, 则 A, B, C 应满足

A. $AB > 0, BC > 0$ B. $AB > 0, BC < 0$ C. $AB < 0, BC > 0$ D. $AB < 0, BC < 0$

11. 在正四面体 $S-ABC$ 中, 若 P 为棱 SC 的中点, 那么异面直线 PB 与 SA 所成的角的余弦值等于

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{33}}{6}$

12. 已知 m, n 是空间两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 则下列命题中正确的是

A. $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta, m // n \Rightarrow n // \beta$

B. $m \perp \alpha, m \perp n, \alpha // \beta \Rightarrow n // \beta$

C. $m // \alpha, m \perp n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

D. $m \perp \alpha, m // n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

13. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

14. 已知圆锥的全面积是底面积的3倍, 那么这个圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为

A. 90度

B. 120度

C. 150度

D. 180度

15. 已知圆 C 的标准方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 直线 l 的方程为 $y = k(x-2)$, 若直线 l 和圆 C 有公共点, 则实数 k 的取值范围是

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

B. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

C. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

D. $[-1, 1]$

16. 设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V , 点 P, Q 分别在侧棱 AA_1, CC_1 上, 且 $PA = QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为

A. $\frac{1}{6}V$

B. $\frac{1}{4}V$

C. $\frac{1}{3}V$

D. $\frac{1}{2}V$

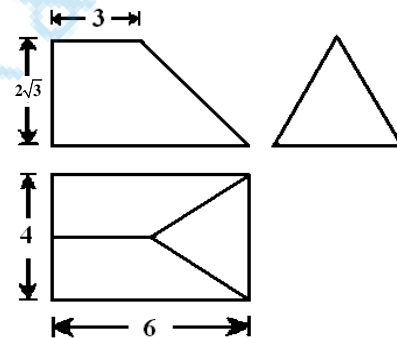
五. 填空题: 共2小题, 每小题5分, 共10分, 把答案填在答卷卡的相应位置上。

17. 已知某几何体的三视图的侧视图是一个正三角形, 如图所示,

则该几何体的体积等于_____

18. 半径为 $\sqrt{2}$, 且与圆 $x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$ 外切于原点的

圆的标准方程为_____



六. 解答题: 共4小题, 共48分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

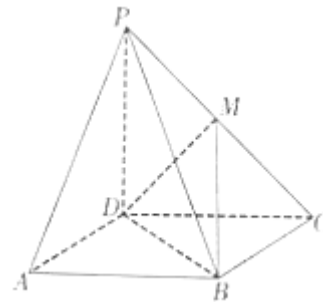
19. (本小题满分12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle BCD = 60^\circ$,

$AB = 2AD$. $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PC 的中点。

(1) 求证: $PA //$ 平面 BMD ;

(2) 求证: $AD \perp PB$.



20. (本小题满分 12 分)

已知圆 C 过点 $A(1,2)$ 和 $B(1,10)$, 且与直线 $x-2y-1=0$ 相切。

(1) 求圆 C 的方程;

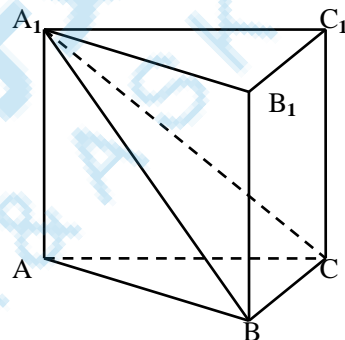
(2) 设 P 为圆 C 上的任意一点, 定点 $Q(-3,-6)$, 当点 P 在圆 C 上运动时, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 , 且 $AA_1 = AB = 2$.

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 若 $AC = 2\sqrt{2}$, 求锐二面角 $A-A_1C-B$ 的大小。



22. (本小题满分 12 分)

已知圆 M 的标准方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 1$, 圆心为 M , 直线 l 的方程为 $x-2y=0$, 点 P 在直线 l 上, 过 P 点作圆 M 的切线 PA , PB , 切点分别为 A , B .

(1) 若 $\angle APB = 60^\circ$, 试求点 P 的坐标;

(2) 若 P 点的坐标为 $(2,1)$, 过 P 作直线与圆 M 交于 C, D 两点, 当 $CD = \sqrt{2}$ 时, 求直线 CD 的方程;

(3) 求证: 经过 A , P , M 三点的圆必过定点, 并求出所有定点的坐标。

深圳市高级中学2015—2016学年第一学期期末测试

高一数学

命题人: 范艳

审题人: 程正科

本试卷由两部分组成。第一部分: 期中前基础知识和能力考查, 共 57 分; 第二部分: 期中后知识考查, 共 93 分。全卷共计 150 分, 考试时间为 120 分钟。

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动用橡皮擦干净后, 再涂其它答案, 不能答在试题卷上。
3. 考试结束, 监考人员将答题卡按座位号、页码顺序收回。

第 I 卷 (本卷共计 57 分)

一. 选择题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。

1. 集合 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x + 3\}$, 则 $A \cap B =$ D
 A. $\{2, 5\}$ B. $[2, 5]$ C. $(2, 5)$ D. $\{(2, 5)\}$
2. 若 $a = \ln 2$, $b = \pi^{\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} e$, 则有 B
 A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$
 D. $c > a > b$
3. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 的零点所在的区间为 C
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2, & x \leq 1, \\ \log_2(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right] =$ A
 A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. -5 D. $\frac{1}{2}$
5. 已知定义域为 \mathbf{R} 的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 则不等式 $f(\log_4 x) > 2$ 的解集为 A
 A. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
 D. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

二. 填空题: 共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分, 把答案填在答卷卡的相应位置上。

6. 计算 $(\lg \frac{1}{4} - \lg 25) \div 100^{-\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}. -20$

7. 已知符号函数 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, 则函数 $f(x) = \text{sgn}(\ln x) - \ln x$ 的零点个数为 3

三. 解答题: 共 2 小题, 共 22 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

8. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + ae^x}$, 其中 a 为常数.

(1) 若 $a = 1$, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 若函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + ae^x}$ 在其定义域上是奇函数, 求实数 a 的值.

解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$, 其定义域为 \mathbb{R} .

$$\text{此时对任意的 } x \in \mathbb{R}, \text{ 都有 } f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 在其定义域上为奇函数。

(2) 若函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + ae^x}$ 在其定义域上是奇函数, 则对定义域内的任意 x , 有:

$$f(-x) = \frac{a - e^{-x}}{1 + ae^{-x}} = \frac{ae^x - 1}{e^x + a} = -f(x) = \frac{e^x - a}{1 + ae^x}$$

整理得: $a^2 e^{2x} - 1 = e^{2x} - a^2$, 即: $e^{2x}(a^2 - 1) = 1 - a^2$ 对定义域内的任意 x 都成立。

所以 $a^2 = 1$

当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$, 定义域为 \mathbb{R} ;

当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{-1 - e^x}{1 - e^x} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

所以实数 a 的值为 $a = 1$ 或 $a = -1$.

9. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 + ax + 2)$, ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \lg(-x^2 - x + 2)$

$$-x^2 - x + 2 > 0, \text{ 即 } x^2 + x - 2 < 0, \text{ 解得: } -2 < x < 1$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 1)$

设 $t(x) = -x^2 - x + 2, x \in (-2, 1)$, 则 $f(x) = \lg t$ 关于 t 在 $t \in (0, +\infty)$ 为增函数.

由复合函数的单调性, $f(x)$ 的单调区间与 $t(x) = -x^2 - x + 2, x \in (-2, 1)$ 的单调区间一致.

二次函数 $t(x) = -x^2 - x + 2, x \in (-2, 1)$ 的对称轴为 $x_0 = -\frac{1}{2}$

所以 $t(x)$ 在 $x \in (-2, -\frac{1}{2}]$ 单调递增, 在 $x \in [-\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-2, -\frac{1}{2}]$, 单调减区间为 $[-\frac{1}{2}, 1)$.

(2) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = \lg 2$ 为常数函数, 定义域为 \mathbf{R} , 满足条件.

当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} 等价于 $ax^2 + ax + 2 > 0$ 恒成立.

$$\text{于是有 } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = a^2 - 8a < 0 \end{cases}, \text{ 解得: } 0 < a < 8$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $0 \leq a < 8$.

第 II 卷 (本卷共计 93 分)

四. 选择题: 共 7 小题, 每小题 5 分, 共 35 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

10. 已知直线 $Ax + By + C = 0$ 不经过第三象限, 则 A, B, C 应满足 B

A. $AB > 0, BC > 0$ B. $AB > 0, BC < 0$ C. $AB < 0, BC > 0$ D. $AB < 0, BC < 0$

11. 在正四面体 $S-ABC$ 中, 若 P 为棱 SC 的中点, 那么异面直线 PB 与 SA 所成的角的余弦值等于

A

$$\text{A. } \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{B. } \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{C. } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{D. } \frac{\sqrt{33}}{6}$$

12. 已知 m, n 是空间两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 则下列命题中正确的是 D

A. $m \perp \alpha, \alpha \perp \beta, m // n \Rightarrow n // \beta$

B. $m \perp \alpha, m \perp n, \alpha // \beta \Rightarrow n // \beta$

C. $m // \alpha, m \perp n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

D. $m \perp \alpha, m // n, \alpha // \beta \Rightarrow n \perp \beta$

13. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 C

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

14. 已知圆锥的全面积是底面积的3倍, 那么这个圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为 D

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{6}$

D. π

15. 已知圆 C 的标准方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 直线 l 的方程为 $y = k(x-2)$, 若直线 l 和圆 C 有公共点, 则实数 k 的取值范围是 B

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

B. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

C. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

D. $[-1, 1]$

16. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V , 点 P, Q 分别在侧棱 AA_1, CC_1 上, 且 $PA = QC_1$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 C

A. $\frac{1}{6}V$

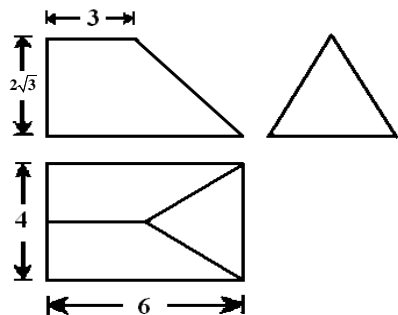
B. $\frac{1}{4}V$

C. $\frac{1}{3}V$

D. $\frac{1}{2}V$

五. 填空题: 共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分, 把答案填在答卷卡的相应位置上。

17. 已知某几何体的三视图的侧视图是一个正三角形, 如图所示, 则该几何体的体积等于 $20\sqrt{3}$



18. 半径为 $\sqrt{2}$, 且与圆 $x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$ 外切于原点的圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

六. 解答题: 共 4 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (本小题满分 12 分)

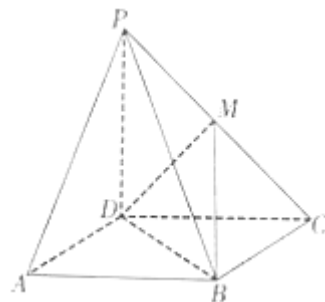
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形,

$\angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2AD$. $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PC 的中点.

(1) 求证: $PA //$ 平面 BMD ;

(2) 求证: $AD \perp PB$.

(1) 证明: 连接 AC , AC 与 BD 相交于点 O , 连接 MO ,



$\because ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore O$ 是 AC 的中点.

$\because M$ 为 PC 的中点,

$\therefore MO \parallel AP$.

$\because PA \not\subset$ 平面 BMD , $MO \subset$ 平面 BMD ,

$\therefore PA \parallel$ 平面 BMD .

(2) 证明: $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PD \perp AD$.

方法 1:

$\because AB = 2AD$, 设 $AD = 2$, $AB = 4$, 过点 D 作 AB 的垂线交 AB 于点 E 。

$\because \angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore AE = 1, DE = \sqrt{3}, BE = 3$

$\because DE \perp AB \therefore BD = 2\sqrt{3}$

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$.

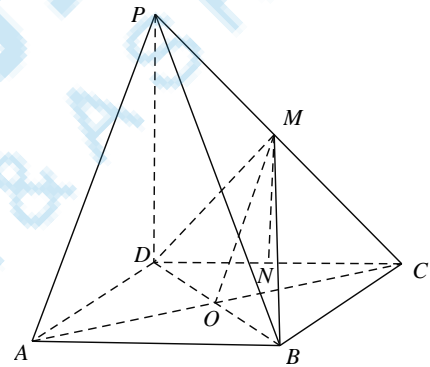
$\therefore AD \perp BD$.

$\because PD \cap BD = D$, $PD \subset$ 平面 PBD , $BD \subset$ 平面 PBD ,

$\therefore AD \perp$ 平面 PBD .

$\because PB \subset$ 平面 PBD ,

$\therefore AD \perp PB$.



方法 2:

$\because \angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, $AB = 2AD$,

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$

$$= AB^2 + AD^2 - 2AD^2$$

$$= AB^2 - AD^2.$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

$$\therefore AD \perp BD.$$

$$\because PD \cap BD = D, PD \subset \text{平面 } PBD, BD \subset \text{平面 } PBD,$$

$$\therefore AD \perp \text{平面 } PBD.$$

$$\because PB \subset \text{平面 } PBD,$$

$$\therefore AD \perp PB.$$

20. (本小题满分 12 分)

已知圆 C 过点 $A(1,2)$ 和 $B(1,10)$, 且与直线 $x-2y-1=0$ 相切。

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 设 P 为圆 C 上的任意一点, 定点 $Q(-3,-6)$, 当点 P 在圆 C 上运动时, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程.

解: (1) 圆心显然在线段 AB 的垂直平分线 $y=6$ 上, 设圆心为 $(a,6)$, 半径为 r , 则:

$$\text{圆 } C \text{ 的标准方程为 } (x-a)^2 + (y-6)^2 = r^2,$$

$$\text{由点 } B \text{ 在圆上得: } (1-a)^2 + (10-6)^2 = r^2,$$

$$\text{又圆 } C \text{ 与直线 } x-2y-1=0, \text{ 有 } r = \frac{|a-13|}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{于是 } (a-1)^2 + 16 = \frac{(a-13)^2}{5}$$

$$\text{解得: } a=3, r=2\sqrt{5}, \text{ 或 } a=-7, r=4\sqrt{5}$$

$$\text{所以圆 } C \text{ 的标准方程为 } (x-3)^2 + (y-6)^2 = 20, \text{ 或 } (x+7)^2 + (y-6)^2 = 80$$

(2) 设 M 点坐标为 (x, y) , P 点坐标为 (x_0, y_0) ,

由 M 为 PQ 的中点, 则 $\begin{cases} x = \frac{x_0 - 3}{2} \\ y = \frac{y_0 - 6}{2} \end{cases}$, 即: $\begin{cases} x_0 = 2x + 3 \\ y_0 = 2y + 6 \end{cases}$

又点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 C 上,

若圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 20$, 有: $(x_0-3)^2 + (y_0-6)^2 = 20$,

则 $(2x+3-3)^2 + (2y+6-6)^2 = 20$, 整理得: $x^2 + y^2 = 5$

此时点 M 的轨迹方程为: $x^2 + y^2 = 5$.

若圆的方程为 $(x+7)^2 + (y-6)^2 = 80$, 有: $(x_0+7)^2 + (y_0-6)^2 = 80$,

则 $(2x+3+7)^2 + (2y+6-6)^2 = 80$, 整理得: $(x+5)^2 + y^2 = 20$

此时点 M 的轨迹方程为: $(x+5)^2 + y^2 = 20$

综上所述: 点 M 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 5$, 或 $(x+5)^2 + y^2 = 20$

21. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 , 且 $AA_1 = AB = 2$

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 若 $AC = 2\sqrt{2}$, 求锐二面角 $A-A_1C-B$ 的大小.

解: (1) 证明: 如右图, 取 A_1B 的中点 D , 连接 AD ,

因 $AA_1 = AB$, 则 $AD \perp A_1B$

由平面 $A_1BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 , 且平面 $A_1BC \cap$ 侧面 $A_1ABB_1 = A_1B$,

得 $AD \perp$ 平面 A_1BC ,

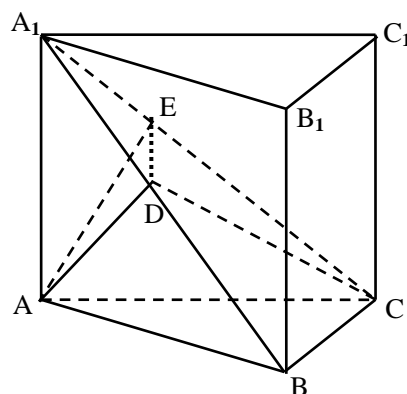
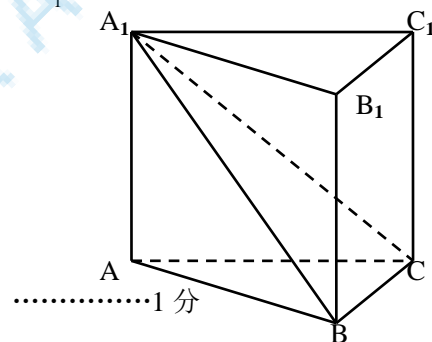
又 $BC \subset$ 平面 A_1BC ,

所以 $AD \perp BC$4 分

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

则 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ,

所以 $AA_1 \perp BC$5 分



又 $AA_1 \cap AD = A$ ，从而 $BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 ，

又 $AB \subset$ 侧面 A_1ABB_1 ，故 $AB \perp BC$7 分

(2) 解：过点 A 作 $AE \perp A_1C$ 于点 E ，连 DE 。

由 (1) 知 $AD \perp$ 平面 A_1BC ，则 $AD \perp A_1C$ ，且 $AE \cap AD = A$

$\therefore \angle AED$ 即为二面角 $A-A_1C-B$ 的一个平面角9 分

且直角 $\triangle A_1AC$ 中： $AE = \frac{A_1A \cdot AC}{A_1C} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 10 分

又 $AD = \sqrt{2}$ ， $\angle ADE = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,11 分

由二面角 $A-A_1C-B$ 为锐二面角 $\therefore \angle AED = \frac{\pi}{3}$,

即二面角 $A-A_1C-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 12 分

22. (本小题满分 12 分)

已知圆 M 的标准方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ，圆心为 M ，直线 l 的方程为 $x-2y=0$ ，点 P 在直线 l 上，过 P 点作圆 M 的切线 PA ， PB ，切点分别为 A ， B 。

(1) 若 $\angle APB = 60^\circ$ ，试求点 P 的坐标；

(2) 若 P 点的坐标为 $(2,1)$ ，过 P 作直线与圆 M 交于 C, D 两点，当 $CD = \sqrt{2}$ 时，求直线 CD 的方程；

(3) 求证：经过 A ， P ， M 三点的圆必过定点，并求出所有定点的坐标。

解：(1) 直线 l 的方程为 $x-2y=0$ ，点 P 在直线 l 上，设 $P(2m, m)$ ，

由题可知 $MP = 2$ ，所以 $(2m)^2 + (m-2)^2 = 4$ ，

解之得： $m=0, m=\frac{4}{5}$ 故所求点 P 的坐标为 $P(0,0)$ 或 $P(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$ 。

(2) 易知直线 CD 的斜率一定存在，设其方程为： $y-1=k(x-2)$ ，

由题知圆心 M 到直线 CD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，

解得, $k = -1$ 或 $k = -\frac{1}{7}$,

故所求直线 CD 的方程为: $x + y - 3 = 0$ 或 $x + 7y - 9 = 0$.

(3) 设 $P(2m, m)$, 则 MP 的中点 $Q(m, \frac{m}{2} + 1)$, 因为 PA 是圆 M 的切线,

所以经过 A, P, M 三点的圆是以 Q 为圆心, 以 MQ 为半径的圆,

故其方程为: $(x - m)^2 + (y - \frac{m}{2} - 1)^2 = m^2 + (\frac{m}{2} - 1)^2$

化简得: $x^2 + y^2 - 2y - m(2x + y - 2) = 0$, 此式是关于 m 的恒等式,

$$\text{故} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ 2x + y - 2 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{4}{5}, \\ y = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

所以经过 A, P, M 三点的圆必过定点 $(0, 2)$ 或 $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ 。