

## 广东省深圳中学 2014-2015 学年高一上学期期末数学试卷

## 一、选择题: (8 小题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. (4 分) 斜率为 3, 在  $y$  轴上的截距为 4 的直线方程是 ( )

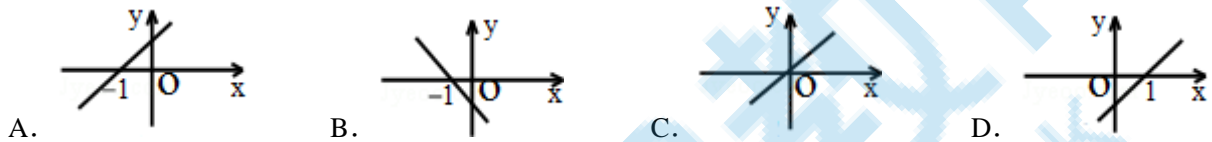
- A.  $3x - y + 4 = 0$       B.  $x - 3y - 12 = 0$       C.  $3x - y - 4 = 0$       D.  $3x - y - 12 = 0$

2. (4 分) 在空间, 下列命题中正确的是 ( )

- A. 没有公共点的两条直线平行  
B. 与同一直线垂直的两条直线平行  
C. 平行于同一直线的两条直线平行  
D. 已知直线  $a$  不在平面  $\alpha$  内, 则直线  $a$  平面  $\alpha$

3. (4 分) 若两个平面互相平行, 则分别在这两个平行平面内的两条直线 ( )

- A. 平行      B. 异面      C. 相交      D. 平行或异面

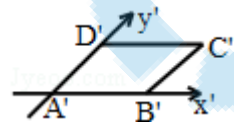
4. (4 分) 直线  $y = ax + b$  ( $a + b = 0$ ) 的图象可能是 ( )5. (4 分) 过点  $(-1, 3)$  且垂直于直线  $x - 2y + 3 = 0$  的直线方程为 ( )

- A.  $2x + y - 1 = 0$       B.  $2x + y - 5 = 0$       C.  $x + 2y - 5 = 0$       D.  $x - 2y + 7 = 0$

6. (4 分) 某几何体的三视图如图所示, 那么这个几何体是 ( )



- A. 三棱锥      B. 四棱锥      C. 四棱台      D. 三棱台

7. (4 分) 如图所示为一个平面四边形  $ABCD$  的直观图,  $A'D' \parallel B'C'$ , 且  $A'D' = B'C'$ , 则它的实际形状 ( )

- A. 平行四边形      B. 梯形      C. 菱形      D. 矩形

8. (4 分) 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为 ( )

- A.  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$       B.  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$       C.  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$       D.  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

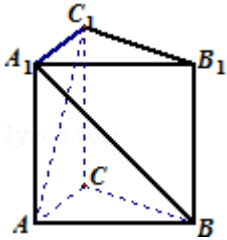
## 二、填空题: (5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

9. (5 分) 空间两点  $P_1(2, 3, 5)$ ,  $P_2(3, 1, 4)$  间的距离  $|P_1P_2| =$ .10. (5 分) 若圆  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  关于直线  $y = x + b$  对称, 则实数  $b =$ .

11. (5分) 圆锥的底面半径是3, 高是4, 则圆锥的侧面积是.

12. (5分) 若光线从点  $A(-3, 5)$  射到  $x$  轴上, 经反射以后经过点  $B(2, 10)$ , 则光线  $A$  到  $B$  的距离为.

13. (5分) 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC=AB=AA_1$ , 且异面直线  $AC_1$  与  $A_1B$  所成的角为  $60^\circ$ , 则  $\angle CAB$  等于.



三、解答题: 本大题共4小题, 共43分.

14. (10分) 已知  $C$  是直线  $l_1: 3x - 2y + 3 = 0$  和直线  $l_2: 2x - y + 2 = 0$  的交点,  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ .

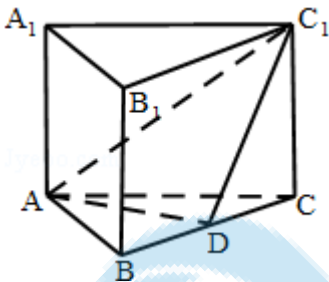
(1) 求  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $C$  的坐标;

(2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

15. (10分) 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 点  $D$  在边  $BC$  上,  $AD \perp C_1D$ .

(1) 求证: 平面  $ADC_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ;

(2) 若  $AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ , 求二面角  $C_1 - AD - C$  的大小.



16. (11分) 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$  关于直线  $L: x - 2y + 1 = 0$  对称的圆为  $D$ .

(1) 求圆  $D$  的方程

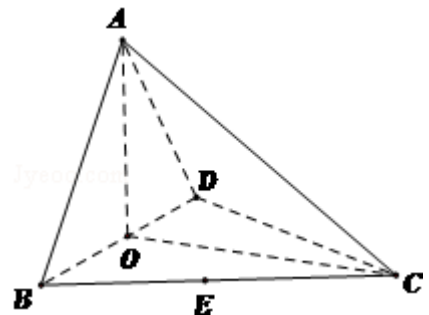
(2) 在圆  $C$  和圆  $D$  上各取点  $P, Q$ , 求线段  $PQ$  长的最小值.

17. (12分) 如图, 四面体  $ABCD$  中,  $O, E$  分别是  $BD, BC$  的中点,  $CA=CB=CD=BD=2$ ,  $AB=AD=\sqrt{2}$ .

(I) 求证:  $AO \perp$  平面  $BCD$ ;

(II) 求异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角的余弦;

(III) 求点  $E$  到平面  $ACD$  的距离.



# 广东省深圳中学 2014-2015 学年高一上学期期末数学试卷

## 参考答案与试题解析

### 一、选择题: (8 小题, 每题 4 分, 共 32 分)

1. (4 分) 斜率为 3, 在  $y$  轴上的截距为 4 的直线方程是 ( )

- A.  $3x - y + 4 = 0$       B.  $x - 3y - 12 = 0$       C.  $3x - y - 4 = 0$       D.  $3x - y - 12 = 0$

**考点:** 直线的斜截式方程.

**专题:** 直线与圆.

**分析:** 利用斜截式即可得出.

**解答:** 解: 利用斜截式可得  $y = 3x + 4$ , 即  $3x - y + 4 = 0$ .

故选: A.

**点评:** 本题考查了斜截式方程, 属于基础题.

2. (4 分) 在空间, 下列命题中正确的是 ( )

- A. 没有公共点的两条直线平行  
B. 与同一直线垂直的两条直线平行  
C. 平行于同一直线的两条直线平行  
D. 已知直线  $a$  不在平面  $\alpha$  内, 则直线  $a \parallel$  平面  $\alpha$

**考点:** 空间中直线与平面之间的位置关系.

**专题:** 空间位置关系与距离.

**分析:** 在 A 中两直线还有可能异面; 在 B 中两直线还有可能相交或异面; 由平行公理知 C 正确; 在 D 中直线  $a$  与平面  $\alpha$  还有可能相交.

**解答:** 解: 没有公共点的两条直线平行或异面, 故 A 错误;

与同一直线垂直的两条直线相交、平行或异面, 故 B 错误;

由平行公理知: 平行于同一直线的两直线平行, 故 C 正确;

已知直线  $a$  不在平面  $\alpha$  内,

则直线  $a \parallel$  平面  $\alpha$  或直线  $a$  与平面  $\alpha$  相交, 故 D 正确.

故选: C.

**点评:** 本题考查命题真假的判断, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意空间中直线、线面、面面间的位置关系的合理运用.

3. (4 分) 若两个平面互相平行, 则分别在这两个平行平面内的两条直线 ( )

- A. 平行      B. 异面      C. 相交      D. 平行或异面

**考点:** 空间中直线与平面之间的位置关系.

**专题:** 计算题; 空间位置关系与距离.

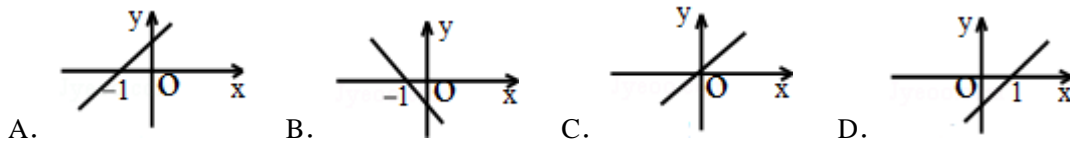
**分析:** 分别在两个互相平行的平面内的两条直线, 没有公共点, 故平行或异面.

**解答:** 解: 分别在两个互相平行的平面内的两条直线, 没有公共点, 故平行或异面,

故选: D.

**点评:** 熟练掌握空间直线平面之间位置关系的判定、性质、定义是解答本题的关键.

4. (4分) 直线  $y=ax+b$  ( $a+b=0$ ) 的图象可能是 ( )



**考点:** 函数的图象.

**专题:** 函数的性质及应用.

**分析:** 求出图象过定点  $(1, 0)$ , 问题得以解决

**解答:** 解:  $\because$  直线  $y=ax+b$  ( $a+b=0$ ),

$\therefore$  图象过定点  $(1, 0)$ ,

故选: D

**点评:** 本题考查了图象的识别, 属于基础题

5. (4分) 过点  $(-1, 3)$  且垂直于直线  $x-2y+3=0$  的直线方程为 ( )

A.  $2x+y-1=0$       B.  $2x+y-5=0$       C.  $x+2y-5=0$       D.  $x-2y+7=0$

**考点:** 直线的点斜式方程; 两条直线垂直与倾斜角、斜率的关系.

**专题:** 计算题.

**分析:** 根据题意, 易得直线  $x-2y+3=0$  的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 由直线垂直的斜率关系, 可得所求直线的斜率为  $-2$ ,

又知其过定点坐标, 由点斜式得所求直线方程.

**解答:** 解: 根据题意, 易得直线  $x-2y+3=0$  的斜率为  $\frac{1}{2}$ ,

由直线垂直的斜率关系, 可得所求直线的斜率为  $-2$ ,

又知其过点  $(-1, 3)$ ,

由点斜式得所求直线方程为  $2x+y-1=0$ .

**点评:** 本题考查直线垂直与斜率的相互关系, 注意斜率不存在的特殊情况.

6. (4分) 某几何体的三视图如图所示, 那么这个几何体是 ( )



A. 三棱锥      B. 四棱锥      C. 四棱台      D. 三棱台

**考点:** 简单空间图形的三视图.

**专题:** 空间位置关系与距离.

**分析:** 由题目中的三视图中, 正视图和侧视图为三角形, 可知几何体为锥体, 进而根据俯视图的形状, 得到答案.

**解答:** 解:  $\because$  正视图和侧视图为三角形, 可知几何体为锥体,

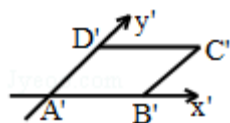
又  $\because$  俯视图为四边形,

故该几何体为四棱锥,

故选: B

**点评:** 本题考查的知识点是由三视图判断几何体的形状, 根据三视图中有两个矩形, 该几何体为棱柱, 有两个三角形, 该几何体为棱锥, 有两个梯形, 该几何体为棱台, 是解答本题的关键.

7. (4分) 如图所示为一个平面四边形  $ABCD$  的直观图,  $A'D' \parallel B'C'$ , 且  $A'D' = B'C'$ , 则它的实际形状 ( )



- A. 平行四边形      B. 梯形      C. 菱形      D. 矩形

**考点:** 平面图形的直观图.

**专题:** 计算题; 空间位置关系与距离.

**分析:** 由直观图可知,  $AB$ ,  $CD$  两条边与横轴平行且相等, 边  $BC$  与纵轴平行, 得到  $AB$  与  $BC$  两条相邻的边之间是垂直关系, 得到平面图形是一个矩形.

**解答:** 解: 根据直观图可知,  $AB$ ,  $CD$  两条边与横轴平行且相等, 故四边形  $ABCD$  为平行四边形, 边  $BC$  与纵轴平行,

$\therefore AB \perp BC$ ,

$\therefore$  平面图形  $ABCD$  是一个矩形,

故选: D.

**点评:** 本题考查平面图形的直观图, 考查有直观图得到平面图形, 考查画直观图要注意到两条坐标轴之间的关系, 本题是一个基础题.

8. (4分) 圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  在点  $P(1, \sqrt{3})$  处的切线方程为 ( )

- A.  $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$       B.  $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$       C.  $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$       D.  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$

**考点:** 圆的切线方程.

**专题:** 计算题.

**分析:** 本题考查的知识点为圆的切线方程. (1) 我们可设出直线的点斜式方程, 联立直线和圆的方程, 根据一元二次方程根与图象交点间的关系, 得到对应的方程有且只有一个实根, 即  $\Delta = 0$ , 求出  $k$  值后, 进而求出直线方程. (2) 由于点在圆上, 我们也可以切线的性质定理, 即此时切线与过切点的半径垂直, 进行求出切线的方程.

**解答:** 解: 法一:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$y = kx - k + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 4x + (kx - k + \sqrt{3})^2 = 0.$$

该二次方程应有两相等实根, 即  $\Delta = 0$ , 解得  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\therefore y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt{3}y + 2 = 0.$$

法二:

$\because$  点  $(1, \sqrt{3})$  在圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  上,

$\therefore$  点  $P$  为切点, 从而圆心与  $P$  的连线应与切线垂直.

又  $\because$  圆心为  $(2, 0)$ ,  $\therefore \frac{0 - \sqrt{3}}{2 - 1} \cdot k = -1$ .

解得  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

∴切线方程为  $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ .

故选 D

**点评:** 求过一定点的圆的切线方程, 首先必须判断这点是否在圆上. 若在圆上, 则该点为切点, 若点  $P(x_0, y_0)$  在圆  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 上, 则过点  $P$  的切线方程为  $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = r^2$  ( $r > 0$ ); 若在圆外, 切线应有两条. 一般用“圆心到切线的距离等于半径长”来解较为简单. 若求出的斜率只有一个, 应找出过这一点与  $x$  轴垂直的另一条切线.

## 二、填空题: (5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

9. (5 分) 空间两点  $P_1(2, 3, 5)$ ,  $P_2(3, 1, 4)$  间的距离  $|P_1P_2| = \sqrt{6}$ .

**考点:** 空间两点间的距离公式.

**专题:** 空间位置关系与距离.

**分析:** 直接利用空间两点间的距离公式求解即可.

**解答:** 解: 空间两点  $P_1(2, 3, 5)$ ,  $P_2(3, 1, 4)$  间的距离

$$|P_1P_2| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{6}.$$

故答案为:  $\sqrt{6}$ .

**点评:** 本题考查空间两点间的距离公式的应用, 基本知识的考查.

10. (5 分) 若圆  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$  关于直线  $y=x+b$  对称, 则实数  $b = 1$ .

**考点:** 圆的标准方程.

**专题:** 计算题; 直线与圆.

**分析:** 由圆  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$  关于直线  $y=x+b$  对称, 知圆心  $(1, 2)$  在直线  $y=x+b$  上, 即可求出  $b$  的值.

**解答:** 解: ∵圆  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$  关于直线  $y=x+b$  对称,

∴圆心  $(1, 2)$  在直线  $y=x+b$  上,

∴  $2=1+b$ ,

解得  $b=1$ .

故答案为: 1.

**点评:** 本题考查关于直线对称的圆的方程, 解题时要认真审题, 解题的关键是由圆  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$  关于直线  $y=x+b$  对称, 知圆心  $(1, 2)$  在直线  $y=x+b$  上.

11. (5 分) 圆锥的底面半径是 3, 高是 4, 则圆锥的侧面积是  $15\pi$ .

**考点:** 旋转体 (圆柱、圆锥、圆台).

**专题:** 计算题.

**分析:** 由已知中圆锥的底面半径是 3, 高是 4, 由勾股定理, 我们可以计算出圆锥的母线长, 代入圆锥侧面积公式  $S = \pi rl$ , 即可得到答案.

**解答:** 解: ∵圆锥的底面半径  $r=3$ , 高  $h=4$ ,

∴圆锥的母线  $l=5$

则圆锥的侧面积  $S = \pi rl = 15\pi$

故答案为:  $15\pi$

**点评:** 本题考查的知识点是圆锥的侧面积, 其中熟练掌握圆锥的侧面积公式  $S=\pi rl$ , 其中  $r$  表示底面半径,  $l$  表示圆锥的母线长, 是解答本题的关键.

12. (5 分) 若光线从点  $A(-3, 5)$  射到  $x$  轴上, 经反射以后经过点  $B(2, 10)$ , 则光线  $A$  到  $B$  的距离为  $5\sqrt{10}$ .

**考点:** 与直线关于点、直线对称的直线方程.

**专题:** 计算题; 直线与圆.

**分析:** 求出点  $A$  关于  $x$  轴的对称点  $A'$  坐标, 由两点间的距离公式, 可得光线  $A$  到  $B$  的距离.

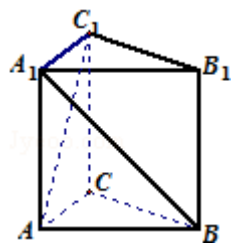
**解答:** 解:  $A$  关于  $x$  轴的对称点  $A'$  坐标是  $(-3, -5)$

由两点间的距离公式, 可得光线  $A$  到  $B$  的距离为  $\sqrt{(2+3)^2 + (10+5)^2} = 5\sqrt{10}$ .

故答案为:  $5\sqrt{10}$ .

**点评:** 本题考查点的对称, 考查两点间的距离公式, 比较基础.

13. (5 分) 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC=AB=AA_1$ , 且异面直线  $AC_1$  与  $A_1B$  所成的角为  $60^\circ$ , 则  $\angle CAB$  等于  $90^\circ$ .



**考点:** 异面直线及其所成的角

**专题:** 空间角.

**分析:** 由已知条件, 构造正方体  $ABDC - A_1B_1D_1C_1$ , 由此能求出  $\angle CAB=90^\circ$ .

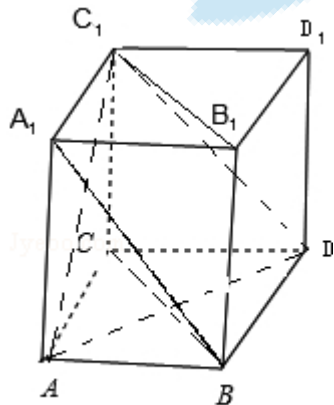
**解答:** 解: 由已知条件, 构造正方体  $ABDC - A_1B_1D_1C_1$ ,

满足条件  $AC=AB=AA_1$ ,

且异面直线  $AC_1$  与  $A_1B$  所成的角为  $60^\circ$ ,

$\therefore \angle CAB=90^\circ$ .

故答案为:  $90^\circ$ .





**点评:** 本题考查异面直线所成角的大小的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意构造法的合理运用.

### 三、解答题: 本大题共 4 小题, 共 43 分.

14. (10 分) 已知  $C$  是直线  $l_1: 3x - 2y + 3 = 0$  和直线  $l_2: 2x - y + 2 = 0$  的交点,  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ .

(1) 求  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $C$  的坐标;

(2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

**考点:** 点到直线的距离公式; 直线的一般式方程与直线的垂直关系.

**专题:** 直线与圆.

**分析:** (1) 解方程组  $\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ , 能求出  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $C$  的坐标.

(2) 设  $AB$  上的高为  $h$ ,  $AB$  边上的高  $h$  就是点  $C$  到  $AB$  的距离, 求出直线  $AB$  的方程, 再利用点到直线的距离公式能求出  $h$ , 由此能求出  $\triangle ABC$  的面积.

**解答:** 解: (1) 解方程组  $\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ .

所以  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $C$  的坐标为  $C(-1, 0)$ . (4 分)

(2) 设  $AB$  上的高为  $h$ ,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} \cdot h = \sqrt{2} h,$$

$AB$  边上的高  $h$  就是点  $C$  到  $AB$  的距离.

$$AB \text{ 边所在直线方程为 } \frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{3-1},$$

即  $x + y - 4 = 0$ . (7 分)

$$\text{点 } C \text{ 到 } x + y - 4 = 0 \text{ 的距离为 } h = \frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

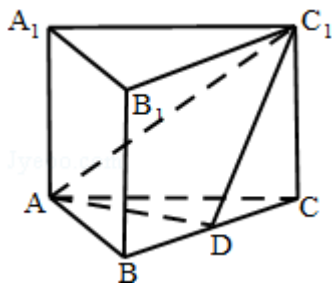
$$\text{因此, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5. \text{ (10 分)}$$

**点评:** 本题考查两直线交点坐标和三角形面积的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意点到直线的距离公式的合理运用.

15. (10 分) 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 点  $D$  在边  $BC$  上,  $AD \perp C_1D$ .

(1) 求证: 平面  $ADC_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ;

(2) 若  $AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$ , 求二面角  $C_1 - AD - C$  的大小.





**考点:** 二面角的平面角及求法; 平面与平面垂直的判定.

**专题:** 空间位置关系与距离; 空间角.

**分析:** (1) 根据面面垂直的判定定理即可证明平面  $ADC_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ;

(2) 根据二面角的定义求出二面角的平面角, 结合三角形的边角关系即可, 求二面角  $C_1 - AD - C$  的大小.

**解答:** 解: 
$$\left. \begin{array}{l} (1) C_1C \perp \text{平面} ABC \\ AD \subset \text{平面} ABC \end{array} \right\} \Rightarrow C_1C \perp AD$$
  

$$\left. \begin{array}{l} AD \perp C_1D \\ DC_1 \cap CC_1 = C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp \text{平面} CDC_1$$

则  $AD \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ,

$\therefore AD \subset$  平面  $ADC_1$ ,

$\therefore$  平面  $ADC_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

(2)  $\therefore C_1D \perp AD$ ,  $CD \perp AD$ ,

$\therefore \angle CDC_1$  为二面角的平面角,

在  $Rt\triangle C_1CD$  中,  $\therefore AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ ,

$\therefore CD = \frac{1}{2}C_1D$ ,  $\angle CDC_1 = 60^\circ$ ,

$\therefore$  二面角  $C_1 - AD - C$  的大小为  $60^\circ$ .

**点评:** 本题主要考查面面垂直的判定, 以及二面角的求解, 利用定义法是解决本题的关键.

16. (11 分) 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$  关于直线  $L: x - 2y + 1 = 0$  对称的圆为  $D$ .

(1) 求圆  $D$  的方程

(2) 在圆  $C$  和圆  $D$  上各取点  $P, Q$ , 求线段  $PQ$  长的最小值.

**考点:** 直线和圆的方程的应用; 圆的标准方程.

**专题:** 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**分析:** (1) 根据对称性得到圆心  $C$  和圆心  $D$  关于直线对称, 得到圆心  $D$  的坐标, 从而求出圆  $D$  的方程;

(2) 根据题意画出图形, 表示出  $|PQ|$ , 从而求出最小值.

**解答:** 解: (1) 圆  $C$  的方程为  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ , 圆心:  $C(2, -1)$ , 半径:  $r = 2$ ,

设圆  $D$  的方程为  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ , 则点  $(a, b)$  与  $(2, -1)$  关于  $L$  对称.

$$\therefore \begin{cases} \frac{b+1}{a-2} \cdot \frac{1}{2} = -1 \\ \frac{a+2}{2} - 2 \times \frac{b-1}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{5} \\ b = \frac{12}{5} \end{cases},$$

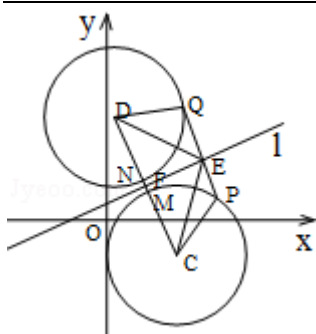
圆  $D: (x + \frac{6}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 = 4$ .

(2) 圆心  $(2, -1)$  到  $L$  的距离为  $\sqrt{5}$ , 大于半径 2,

$\therefore$  圆  $C$  与  $l$  相离,

设线段  $CD$  与圆  $C$ , 圆  $D$ , 直线  $l$  分别交于  $M, N, F$ ,

则  $CD \perp l$ , 线段  $PQ$  与  $l$  交于  $E$  点,



$$|PQ| = |PE| + |EQ| = (|PE| + |CP|) + (|QE| + |QD|) - 4$$

$$\geq |CE| + |DE| - 4 \geq |PE| + |DF| - 4 = |CD| - 4 = 2\sqrt{5} - 4,$$

当且仅当 P 为 M, Q 为 N 时, 上式取“=”号,

∴ PQ 的最小值为  $2\sqrt{5} - 4$ .

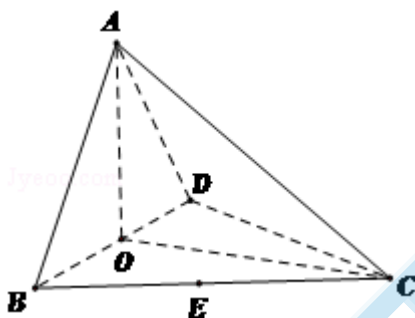
**点评:** 本题考察了直线和圆的关系, 圆的标准方程, 考察最值问题, 本题有一定的难度.

17. (12 分) 如图, 四面体 ABCD 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点,  $CA=CB=CD=BD=2$ ,  $AB=AD=\sqrt{2}$ .

(I) 求证:  $AO \perp$  平面 BCD;

(II) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦;

(III) 求点 E 到平面 ACD 的距离.



**考点:** 点、线、面间的距离计算; 异面直线及其所成的角; 直线与平面垂直的判定.

**专题:** 综合题.

**分析:** (I) 连接 OC, 由  $BO=DO$ ,  $AB=AD$ , 知  $AO \perp BD$ , 由  $BO=DO$ ,  $BC=CD$ , 知  $CO \perp BD$ . 在  $\triangle AOC$  中, 由题设知  $AO=1$ ,  $CO=\sqrt{3}$ ,  $AC=2$ , 故  $AO^2 + CO^2 = AC^2$ , 由此能够证明  $AO \perp$  平面 BCD.

(II) 取 AC 的中点 M, 连接 OM、ME、OE, 由 E 为 BC 的中点, 知  $ME \parallel AB$ ,  $OE \parallel DC$ , 故直线 OE 与 EM 所成的锐角就是异面直线 AB 与 CD 所成的角. 在  $\triangle OME$  中,  $EM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $OE = \frac{1}{2}DC = 1$ , 由此能求出异面直线 AB 与 CD 所成角大小的余弦.

(III) 设点 E 到平面 ACD 的距离为 h. 在  $\triangle ACD$  中,  $CA=CD=2$ ,  $AD=\sqrt{2}$ , 故

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 由 } AO=1, \text{ 知 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 由此能求出点 E 到}$$

平面 ACD 的距离.

**解答:** (I) 证明: 连接 OC,  $\because BO=DO$ ,  $AB=AD$ ,  $\therefore AO \perp BD$ ,

$\because BO=DO$ ,  $BC=CD$ ,  $\therefore CO \perp BD$ .

在  $\triangle AOC$  中, 由题设知  $AO=1$ ,  $CO=\sqrt{3}$ ,  $AC=2$ ,

$$\therefore AO^2 + CO^2 = AC^2,$$

$\therefore \angle AOC = 90^\circ$ , 即  $AO \perp OC$ .

$\therefore AO \perp BD$ ,  $BD \cap OC = O$ ,

$\therefore AO \perp$  平面  $BCD$ .

(II) 解: 取  $AC$  的中点  $M$ , 连接  $OM$ 、 $ME$ 、 $OE$ , 由  $E$  为  $BC$  的中点, 知  $ME \parallel AB$ ,  $OE \parallel DC$ ,

$\therefore$  直线  $OE$  与  $EM$  所成的锐角就是异面直线  $AB$  与  $CD$  所成的角.

在  $\triangle OME$  中,  $EM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $OE = \frac{1}{2}DC = 1$ , ... (6 分)

$\therefore OM$  是直角  $\triangle AOC$  斜边  $AC$  上的中线,  $\therefore OM = \frac{1}{2}AC = 1$ , ... (7 分)

$$\therefore \cos \angle OEM = \frac{1 + 1/2 - 1}{2 \times 1 \times \sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$\therefore$  异面直线  $AB$  与  $CD$  所成角大小的余弦为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  ... (8 分)

(III) 解: 设点  $E$  到平面  $ACD$  的距离为  $h$ .

$$\therefore V_{E-ACD} = V_{A-CDE},$$

$$\therefore \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot AO \cdot S_{\triangle CDE}. \quad \dots (9 \text{ 分})$$

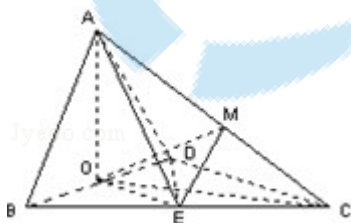
在  $\triangle ACD$  中,  $CA = CD = 2$ ,  $AD = \sqrt{2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore AO = 1, S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore h = \frac{AO \cdot S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$\therefore$  点  $E$  到平面  $ACD$  的距离为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .



**点评:** 本题考查点、线、面间的距离的计算, 考查空间想象力和等价转化能力, 解题时要认真审题, 仔细解答, 注意化立体几何问题为平面几何问题.